Münster.1931.№36 Phil. Diss.

Mathematik

Zu den Abbildungen durch analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen.

Die Invarianz des Mittelpunktes von Kreiskörpern.

Inaugural-Dissertation zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde der Philosphischen und Naturwissenschaftlichen Fakultät der Westfälischen Wilhelms-Universität zu Münster in Westfalen.

vorgelegt von

Peter Thullen
aus Trier

Tag der mündlichen Prüfung: 17. 12. 1930.

Dekan: Herr Prof. Dr. R. Schmidt
Referent: Herr Prof. Dr. H. Behnke

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546201_0087

Zu den Abbildungen durch analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen.

Die Invarianz des Mittelpunktes von Kreiskörpern.

Von

Peter Thullen in Münster (Westf.)*).

Mit Hilfe der Carathéodoryschen Metrik[1]) hat Kritikos[2]) für einen speziellen Reinhardtschen Kreiskörper, den Hyperkegel:

$$|z| + |w| < 1,$$

das überraschende Ergebnis gefunden, daß dieser Körper keine eineindeutigen analytischen Transformationen in sich gestattet, die den Mittelpunkt in einen von ihm verschiedenen Punkt überführen. Ist nun das von Kritikos Bewiesene nur eine Folge der am Rande des Kegels auftretenden Singularität oder ist es allgemein — von speziellen Fällen abgesehen — eine Eigenschaft der Reinhardtschen Körper? Dann wäre damit ganz im Gegensatz zur Theorie einer komplexen Veränderlichen, wo jeder innere Punkt des Kreises in jeden andern transformierbar ist und somit alle Punkte des Kreises gleichwertig sind, dem Mittelpunkt eines Reinhardtschen Körpers eine ganz eigenartige funktionentheoretisch ausgezeichnete Stellung zugeordnet, die zu wichtigen weiteren Konsequenzen führt. Es ist dann die Eigenschaft eines Punktes, Mittelpunkt eines solchen Körpers zu sein, invariant gegen alle eineindeutigen analytischen Abbildungen (sowohl der Körper

*) Seminar Prof. Behnke.

[1]) Carathéodory: a) Über das Schwarzsche Lemma bei analytischen Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen, Math. Annalen 97, S. 76—98. b) Über die Geometrie der analytischen Abbildungen, die durch analytische Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen vermittelt werden, Hamb. Abh. 6, S. 96—145.

[2]) Kritikos, Über analytische Abbildungen einer Klasse von vierdimensionalen Bereichen, Math. Annalen 99, S. 321—341.

auf sich als auch untereinander). Hierdurch ist eine neue bei den Abbildungen dieser Körper auftretende Invariante charakterisiert, die merkwürdig ist, weil sie an jeweils genau einen eindeutig durch sie bestimmten Punkt jener Bereiche gebunden ist.

In der vorliegenden Arbeit wird nun gezeigt werden, daß tatsächlich im allgemeinen Falle ein Reinhardtscher Körper außer den trivialen Transformationen

$$\begin{aligned} z' &= z\, e^{i\vartheta} \\ w' &= w\, e^{i\varphi} \end{aligned} \qquad (\vartheta, \varphi \text{ reell})$$

und dazu bei symmetrischen Bereichen

$$\begin{aligned} z' &= R\, e^{i\vartheta} w \\ w' &= \frac{1}{R}\, e^{i\varphi} z \end{aligned} \qquad (R > 0)$$

keine eineindeutigen analytischen Abbildungen des Innern auf sich gestattet.

Nur die Körper

$$\begin{aligned} &|z|^{\alpha} + |w|^2 < 1 \\ \text{bzw. } &|z|^2 + |w|^{\alpha} < 1 \end{aligned} \qquad (\alpha > 0)$$

und der Dizylinder:

$$|z| < 1, \quad |w| < 1 \text{ [3])}$$

lassen noch weitere Transformationen zu, und zwar für $\alpha \neq 2$ — diese Körper seien **„einseitig kugelhafte"** genannt — auch nur solche, die den Mittelpunkt in einen Punkt der Ebene $z = 0$ bzw. $w = 0$ überführen.

Die einzigen Reinhardtschen Körper also, in denen bei einer analytischen Transformation auf sich der Mittelpunkt in einen beliebigen inneren Punkt transformiert werden kann, sind der Dizylinder und die Hyperkugel $|z|^2 + |w|^2 < 1$.

In dem letzten Teile der Arbeit wird dann aus den gewonnenen Resultaten im Zusammenhang mit einem kürzlich von H. Cartan aufgestellten Satze eine weitere interessante Folgerung für die Abbildungstheorie gezogen werden[3a]).

---

[3]) Natürlich einschließlich ihrer durch Streckung entstehenden Bilder:

$$\begin{aligned} &r_1 |z|^{\alpha} + r_2 |w|^2 < 1 \qquad (r_1, r_2 \text{ reell}, \gtrless 0), \\ &|z| < a, \qquad |w| < b \end{aligned}$$

[3a]) Zu gleicher Zeit hat Herr H. Cartan eine größere, demnächst erscheinende Arbeit fertiggestellt: „Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique". Durch Austausch der Manuskripte habe ich erfahren, daß Herr Cartan mit allerdings ganz anderen Methoden § 2 und § 3 Satz 1 und 2 vorliegender Arbeit ebenfalls bewiesen hat.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

I. Abbildungen der Reinhardtschen Kreiskörper in sich.
§ 1. Bezeichnungen und Abkürzungen 246
§ 2. Die mittelpunktstreuen Abbildungen der Reinhardtschen Körper 248
§ 3. Abbildungen, die einen Punkt der Ebene $z = 0$ in den Mittelpunkt $(0, 0)$ transformieren 249
§ 4. Aufstellung aller Körper, in denen sich ein Punkt der Ebene $z = 0$ in $(0, 0)$ transformieren läßt 251
§ 5. Beweis des Hauptsatzes, daß die in § 4 aufgestellten Körper, nämlich der Dizylinder $|z| < 1$, $|w| < 1$ und die Körper $|z|^{\alpha} + |w|^2 < 1$ die einzigen Körper sind, die nichtmittelpunktstreue Transformationen gestatten 254
II. Abbildungen der Reinhardtschen Körper untereinander . . 256
III. Folgerungen aus I. und II. sowie Bemerkungen zu einem Satz von H. Cartan 257

I. Abbildungen eines Reinhardtschen Kreiskörpers auf sich.

§ 1.

Definition. Unter einem *Reinhardtschen Kreiskörper* verstehen wir einen beschränkten, offenen, vierdimensionalen Bereich K mit einfach zusammenhängendem Rande, der durch die Transformationen

$$\begin{aligned} z' &= z\, e^{i\vartheta} \\ w' &= w\, e^{i\varphi} \end{aligned} \qquad (\vartheta, \varphi \text{ reell})$$

in sich transformiert wird. Der Mittelpunkt $(0, 0)$ sei innerer Punkt[4]). Der Rand eines solchen Körpers wird demnach von allen Ebenen $w =$ konst. und $z =$ konst. in Kreisen geschnitten.

Wir denken uns alle Reinhardtschen Körper so normiert, daß die beiden Symmetrieebenen $z = 0$ und $w = 0$ Kreise vom Radius 1 ausschneiden. Dies erreicht man durch einfache Streckungen:

$$\begin{aligned} z' &= r_1 z \\ w' &= r_2 w\,. \end{aligned}$$

[4]) Wir wählen stets den Nullpunkt als Mittelpunkt, was ja keine Einschränkung bedeutet.

Zu den obigen Körpern rechnet man meist auch die durch ganze lineare Transformationen aus ihnen entstehenden Bilder. Für alle diese Bereiche gilt natürlich gleichfalls das hier Bewiesene.

Wenn wir von einer Abbildung eines Bereiches auf sich sprechen, so verstehen wir darunter stets eine analytische Transformation:

$$z' = f_1(z, w)$$
$$w' = f_2(z, w)$$

(f_1 und f_2 analytisch in z und w), die das Innere des Bereiches eineindeutig auf sich abbildet.

Um nun die Beweise wesentlich zu vereinfachen und übersichtlich gestalten zu können, wollen wir einige abkürzende Bezeichnungen einführen.

Einen Punkt, der bei einer Abbildung eines Reinhardtschen Körpers auf sich in den Mittelpunkt transformierbar ist, nenne ich einen **„ausgezeichneten Punkt"**.

Jede zweidimensionale analytische Fläche, die bei einer solchen Abbildung in die Ebene $z = 0$ bzw. $w = 0$ transformierbar ist, heiße eine **„ausgezeichnete Fläche in bezug auf $z = 0$" (bzw. $w = 0$)**. Da die beiden Symmetrieebenen $z = 0$ und $w = 0$ für unsere Untersuchungen vollkommen gleichwertig sind, genügt es stets, eine Klasse der ausgezeichneten Flächen zu betrachten. Wenn wir daher von ausgezeichneten Flächen schlechthin reden, verstehen wir nur solche darunter, die auf $z = 0$ abbildbar sind.

Bei einer Abbildung eines Körpers auf sich gehen ausgezeichnete Punkte stets nur in ausgezeichnete Punkte, ausgezeichnete Flächen wieder in solche über.

Wir bezeichnen mit $T(\vartheta, \varphi)$ die Drehungsgruppe

$$z' = z\, e^{i\vartheta}$$
$$w' = w\, e^{i\varphi} \qquad (\vartheta, \varphi \text{ reell}),$$

mit $T^*(\vartheta, \varphi)$ die Gruppe

$$z' = w\, e^{i\vartheta}$$
$$w' = z\, e^{i\varphi} \qquad (\vartheta, \varphi \text{ reell}),$$

mit $T_z(\vartheta)$ die einparametrige Gruppe

$$z' = z\, e^{i\vartheta}$$
$$w' = w \qquad (\vartheta \text{ reell}),$$

mit $T_w(\varphi)$

$$z' = z$$
$$w' = w\, e^{i\varphi} \qquad (\varphi \text{ reell}).$$

Unter S bzw. S^* verstehen wir stets Transformationen:

$$S: \quad z' = z\, e^{i\vartheta} f_{w_0}(w)$$
$$w' = \frac{w - w_0}{\bar{w}_0\, w - 1}\, e^{i\varphi},$$

$$S_w^*: \quad \begin{aligned} z' &= \frac{w - w_0}{\bar{w}_0\, w - 1}\, e^{i\vartheta} \\ w' &= z\, e^{i\varphi}\, g_{w_0}(w), \end{aligned}$$

$$S_z^*: \quad \begin{aligned} z' &= w\, e^{i\vartheta}\, \psi_{z_0}(z) \\ w' &= \frac{z - z_0}{\bar{z}_0\, z - 1}\, e^{i\varphi}. \end{aligned}$$

§ 2.

Schon Reinhardt hat gezeigt, daß — von der Hyperkugel abgesehen — die einzigen *mittelpunktstreuen* analytischen Abbildungen eines *konvexen* Reinhardtschen Körpers auf sich nur die Drehungen $T(\vartheta, \varphi)$ sind, und dazu bei symmetrischen Bereichen noch $T^*(\vartheta, \varphi)$. [5])

Es sei nun K ein *nicht konvexer* Reinhardtscher Bereich, $\tilde{K}$ der *kleinste ihn umfassende konvexe* konzentrische Kreisbereich. K kann außer $T(\vartheta, \varphi)$ als mittelpunktstreue Transformationen in sich höchstens noch ganze lineare Transformationen zulassen [6]). Folglich geht durch eine solche Abbildung von K auf sich $\tilde{K}$ wieder in einen konvexen, K umfassenden Kreisbereich $\tilde{K}^*$ über, während $\tilde{K}$ selbst Bild eines ebenfalls konvexen Kreisbereiches K^* wird. Da $\tilde{K}$ der kleinste K umfassende konvexe Kreisbereich ist, gilt einerseits: $\tilde{K} < \tilde{K}^*$, somit $K^* < \tilde{K}$, anderseits: $\tilde{K} < K^*$. Daher ist $\tilde{K} = K^* = \tilde{K}^*$. Dies besagt, daß jede mittelpunktstreue Transformation von K in sich auch den konvexen Körper $\tilde{K}$ auf sich abbildet (insbesondere ist also $\tilde{K}$ ein Reinhardtscher Körper). Daraus folgt, daß auch ein nicht konvexer Reinhardtscher Körper als mittelpunktstreue Transformationen nur die Gruppe $T(\vartheta, \varphi)$ bzw. $T^*(\vartheta, \varphi)$ zuläßt.

Ebenso zeigt man, daß die einzigen möglichen mittelpunktstreuen Abbildungen zweier Reinhardtscher Körper aufeinander (von der Normierung zunächst abgesehen) nur die Streckungen sind:

$$\begin{aligned} z' &= r_1 z \\ w' &= r_2 w \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} z' &= r_3 w \\ w' &= r_4 z, \end{aligned}$$

was ja Reinhardt für konvexe Körper schon bewiesen hatte [5]).

---

[5]) K. Reinhardt, Über Abbildungen der analytischen Funktionen zweier Veränderlichen, Math. Annalen **83**, S. 254—255, Theorem I und II.

[6]) Vgl. H. Behnke, Die Abbildungen der Kreiskörper, Hamb. Abh. 7. Ein allgemeiner Kreiskörper ist ein vierdimensionaler Bereich, der durch alle Ebenen $z = c\,w$ in konzentrischen Kreisscheiben geschnitten wird. Er läßt also die Transformationen zu: $z' = z\,e^{i\vartheta}$, $w' = w\,e^{i\vartheta}$ (ϑ reell). Durch eine ganze lineare Transformation geht ein solcher Körper wieder in einen Kreiskörper über.

Also gilt jetzt allgemein:

Satz. *Die einzigen möglichen mittelpunktstreuen Abbildungen eines beliebigen normierten Reinhardtschen Kreiskörpers (außer der Kugel) auf sich oder zweier Körper untereinander sind die Transformationen*[6a])

$$z' = z\,e^{i\vartheta} \quad w' = w\,e^{i\varphi} \qquad \text{und} \qquad z' = w\,e^{i\vartheta} \quad w' = z\,e^{i\varphi}.$$

§ 3.

Zuerst werde der einfache, aber für das Folgende grundlegende Satz bewiesen:

Satz 1. *Geht bei einer analytischen Abbildung eines Reinhardtschen Körpers K auf sich ein Punkt der Ebene $z = 0$ in den Mittelpunkt $(0, 0)$ über, so wird durch diese Transformation die Ebene $z = 0$ entweder auf sich oder die Ebene $w = 0$ abgebildet*[6a]).

Beweis. Die volle einparametrige Drehungsgruppe $T_z(\vartheta)$ läßt die ganze Ebene $z = 0$ punktweise fest. Wird demnach bei einer analytischen Abbildung von K auf sich — sie sei mit A bezeichnet — ein Punkt $P = (0, w_0)$ der Ebene $z = 0$ in $(0, 0)$ transformiert, so geht die Ebene $z = 0$ in eine analytische Fläche durch $(0, 0)$ über, die bei einer vollen einparametrigen Schar mittelpunktstreuer Transformationen von K in sich

$$A\,T_z(\vartheta)\,A^{-1}$$ [7])

punktweise festbleibt. Die einzigen Flächen dieser Art sind aber — abgesehen bei der Hyperkugel — die Ebenen $z = 0$ und $w = 0$ (nach § 2 sind nämlich $T(\vartheta, \varphi)$ und $T^*(\vartheta, \varphi)$ die einzigen mittelpunktstreuen Transformationen).

Zugleich können wir jetzt schließen:

Satz 2. *Die Transformationen von K in sich, die einen Punkt $P = (0, w_0)$ in $(0, 0)$ überführen, sind Transformationen S bzw. S^** (falls nämlich $z = 0$ auf $w = 0$ abgebildet wird).

Nur $T_z(\vartheta)$ bzw. $T_w(\varphi)$ halten $z = 0$ und $w = 0$ punktweise fest. Daher gilt nach Satz 1:

$$A\,T_z(\vartheta)\,A^{-1} \equiv T_z(\vartheta_1(\vartheta)) \quad \text{oder} \quad A\,T_z(\vartheta)\,A^{-1} \equiv T_w(\varphi(\vartheta)).$$

Folglich ist A von der Form[8]):

$$w' = \varphi(w) \quad z' = z\,f(w) \qquad \text{bzw.} \qquad z' = \varphi(w) \quad w' = z\,f(w).$$

[6a]) Vgl. [3a]).

[7]) Unter $A\,T_z(\vartheta)\,A^{-1}$ verstehen wir die Hintereinanderausführung der Transformationen in der Reihenfolge von rechts nach links.

[8]) Vgl. [6]), S. 340—341.

Da die Ebenen $z = 0$ und $w = 0$ K in Einheitskreisen schneiden, so folgt weiter

$$\varphi(w) = \frac{w - w_0}{\bar{w}_0 w - 1} e^{i\varphi}.$$

Hieraus ergibt sich nun sofort

Satz 3. *Ist in einem Reinhardtschen Körper ein Punkt der Ebene* $z = 0$ *ausgezeichnet*[9]*, so sind es alle inneren Punkte auf* $z = 0$. *Geht bei der zugehörigen Transformation die Ebene* $z = 0$ *in* $w = 0$ *über, so sind alle Punkte der Ebene* $w = 0$ *ausgezeichnet und* K *gestattet sowohl Transformationen* S *wie* S_w^* [10]. [6a])

Beweis. a) Es gehe $z = 0$ in sich über. Mit $P = (0, w_0)$ sind alle Punkte $P = (0, w_0 e^{i\varphi})$ $(0 \leqq \varphi < 2\pi)$ ausgezeichnet. Die zu P gehörige Transformation S führt den Kreis $w = w_0 e^{i\varphi}$, $z = 0$ in einen zu $(0, 0)$ exzentrischen Kreis derselben Ebene über, dessen sämtliche Punkte somit in $(0, 0)$ transformierbar sind. Durch die Drehungen $T_w(\varphi)$ erhält man hieraus eine volle Kreisscheibe, die den Kreis $w = w_0 e^{i\varphi}$ umfaßt. Durch die wiederholte Anwendung der Transformationen S und $T_w(\varphi)$ erhält man stets neue Kreisscheiben ausgezeichneter Punkte, die gegen keinen inneren Kreis $|w| = \varrho < 1$ konvergieren können. Denn ist $|w_0| = \varrho_0$, so geht etwa durch die zu $(0, \varrho_0)$ gehörige Transformation S_0

$$w' = \frac{w - \varrho_0}{\varrho_0 w - 1}$$
$$z' = z f_{\varrho_0}(w)$$

$w = -\varrho$ in einen Punkt $\varrho + \varepsilon\,(\varepsilon > 0)$ über; denn

$$\frac{\varrho + \varrho_0}{\varrho_0 \varrho + 1} > \varrho \quad \text{falls} \quad \varrho < 1.$$

b) Falls die Ebene $z = 0$ auf $w = 0$ abgebildet wird, schließt man ganz entsprechend, daß alle Punkte der Ebene $z = 0$ und auch alle auf $w = 0$ ausgezeichnet sind. K gestattet dann sowohl die Transformationen S_w^*:

$$z' = \frac{w - w_0}{\bar{w}_0 w - 1} e^{i\vartheta}$$
$$w' = z e^{i\varphi} f_{w_0}(w) \qquad \text{für alle } |w_0| < 1,$$

wie S_z^*:

$$z' = w e^{i\vartheta} g_{z_0}(z)$$
$$w' = \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1} e^{i\varphi} \qquad \text{für alle } |z_0| < 1.$$

Aus $S_w^* S_z^* = S$ folgt die Behauptung.

[9]) Es muß natürlich der Punkt von $(0, 0)$ verschieden sein.

[10]) Es folgt weiterhin, daß in diesem Falle K symmetrisch ist.

Aus Satz 2 und 3 läßt sich jetzt leicht beweisen:

Satz 4. *Ist in einem Reinhardtschen Körper ein Punkt der Ebene $z=0$ ausgezeichnet, aber außer $(0,0)$ kein Punkt auf $w=0$, so sind nur die Punkte auf $z=0$ ausgezeichnet.*

Ist nämlich ein Punkt $(0, w_0)$ ausgezeichnet, so existieren auf Grund von Satz 2 und 3 Transformationen des Körpers in sich:

$$w' = \frac{w-c}{\bar{c}\,w-1}$$
$$z' = z\,f_c(w)$$

für jedes $|c|<1$, d. h. die Ebene $w=0$ kann in jede andere Ebene $w=c$ $(|c|<1)$ transformiert werden. Da nach Voraussetzung auf der Ebene $w=0$ außer dem Mittelpunkt $(0,0)$ kein ausgezeichneter Punkt liegt, folgt dies für jede Ebene $w=c$.

§ 4.

Unsere Hauptaufgabe ist es nun, diejenigen Körper zu untersuchen, in denen Punkte der Ebene $z=0$ ausgezeichnet sind, die also gewisse Transformationen S in sich gestatten. Diese Frage löst der folgende Satz:

Satz 5. *Die einzigen Reinhardtschen Körper, die sich so auf sich abbilden lassen, daß dabei ein Punkt der Ebene $z=0$ in den Mittelpunkt $(0,0)$ übergeht, sind die Körper*

$$|z|^\alpha + |w|^2 < 1 \qquad (\alpha > 0)$$

und der Dizylinder

$$|z|<1, \qquad |w|<1.$$

Und zwar gestatten jene die Transformationen

$$z' = z\,e^{i\vartheta}\left\{\frac{1-|w_0|^2}{(\bar{w}_0 w-1)^2}\right\}^{\frac{1}{\alpha}},$$
$$w' = \frac{w-w_0}{\bar{w}_0 w-1}\,e^{i\varphi}.$$

Ist $\alpha \neq 2$, so sind nur diese Transformationen möglich, d. h. in diesen Körpern sind die Punkte auf $z=0$ die einzigen ausgezeichneten Punkte.

Beweis. Es seien in K die Punkte auf $z=0$ ausgezeichnet. K gestattet also gewisse Transformationen S:

$$(1) \qquad \begin{aligned} z &= z'e^{i\vartheta} f_{w_0}(w'), \\ w &= \frac{w'-w_0}{\bar{w}_0 w'-1}\,e^{i\varphi}. \end{aligned}$$

Jede Ebene $w=c$ $(|c|<1)$ ist durch eine dieser Transformationen auf $w=0$ abbildbar. Da nun der Rand von K einfach zusammenhängend ist

(nach Definition), so trifft jede Ebene $w = c$ den Rand nur in *einem* Kreise. Bezeichnet man also mit

$$|z| = R(|w|) \tag{2}$$

den Rand von K, so ist $R(|w|)$ eine eindeutige stetige (reelle) Funktion von $|w|$ (für alle Randpunkte $P = (z, w)$ ist $|w| \leqq 1$, da sonst durch eine der Transformationen (1) ein Randpunkt in einen unendlich fernen Punkt geworfen würde. Es ist also $R(|w|)$ nur definiert für alle $0 \leqq |w| \leqq 1$).

Durch die Transformationen (1) geht (2) über in:

$$|z'| = \frac{R\left(\left|\frac{w'-w_0}{\overline{w}_0 w'-1}\right|\right)}{|f_{w_0}(w')|}\ ^{11}) \qquad \text{(gilt für alle } |w'|<1).$$

Da der Rand von K wieder in den Rand übergeht, gilt die Identität:

$$\frac{R\left(\left|\frac{w-w_0}{\overline{w}_0 w-1}\right|\right)}{|f_{w_0}(w)|} \equiv R(|w|)$$

oder

$$\log|f_{w_0}(w)| \equiv \log \frac{R\left(\left|\frac{w-w_0}{\overline{w}_0 w-1}\right|\right)}{R(|w|)}.$$

$\log|f_{w_0}(w)|$ ist harmonisch in u und v ($w = u + iv$). Daher gilt:

$$\Delta\left(\log R\left(\left|\frac{w-w_0}{\overline{w}_0 w-1}\right|\right)\right) \equiv \Delta \log R(|w|). \tag{3}$$

Es ist

$$\Delta \log R(|w|) = \frac{\partial^2 \log R(|w|)}{\partial |w|^2} + \frac{1}{|w|}\frac{\partial \log R(|w|)}{\partial |w|} = Q(|w|).\ ^{12})$$

Aus (3) folgt:

$$\left|\frac{1-|w_0|^2}{(\overline{w}_0 w-1)^2}\right|^2 Q\left(\left|\frac{w-w_0}{\overline{w}_0 w-1}\right|\right) \equiv Q(|w|). \tag{4}$$

[11]) Da alle Punkte ($|\tilde{w}|<1$, $|\tilde{z}|<R(|\tilde{w}|)$) innere Punkte sind, ist die Transformation (1) für diese Punkte noch regulär und somit $f(w)$ analytisch für alle $|w|<1$.

[12]) Da $R(|w|)$ unabhängig von $\varphi = \arg w$ und $|f(w)| = \frac{R\left(\left|\frac{w-w_0}{\overline{w}_0 w-1}\right|\right)}{R(|w|)}$, so muß $\frac{\partial R\left(\left|\frac{w-w_0}{\overline{w}_0 w-1}\right|\right)}{\partial \varphi}$ existieren für alle $|w|<1$, d. h. insbesondere: $R\left(\left|\frac{w-w_0}{\overline{w}_0 w-1}\right|\right)$ besitzt in jedem Punkt $\tilde{w}$ in Richtung der Tangente an den Kreis $w = \tilde{w}\, e^{i\varphi}$ eine Ableitung. Durch geeignete Veränderung von w_0 kann man diese Richtung in jede beliebige durch $\tilde{w}$ überführen. Folglich ist $R\left(\left|\frac{w-w_0}{\overline{w}_0 w-1}\right|\right)$ und damit auch $R(|w|)$ in jeder Richtung differentiierbar. Ganz entsprechend leitet man die Existenz der zweiten Ableitungen ab.

Nun die Lösungen dieser Funktionalgleichung!

a) $Q(|w|) \equiv 0$, d. h.

$$\frac{\partial^2 \log R(|w|)}{\partial |w|^2} + \frac{1}{|w|} \cdot \frac{\partial \log R(|w|)}{\partial |w|} = 0. \tag{5}$$

Die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung berechnet man leicht als

$$\log R(|w|) = c_0 \log(|w|) + c_1', \tag{6}$$

$$R(|w|) = |w|^{c_0} \cdot c_1. \tag{7}$$

Da der Nullpunkt innerer Punkt des Körpers ist, so ist die einzige normierte[13]) Lösung die Gleichung

$$|z| = R(|w|) = 1,$$

die nur von dem Rande des *Dizylinders* erfüllt wird.

b) Es seien $Q_1(|w|)$ und $Q_2(|w|)$ Lösungen von (4), die nicht identisch verschwinden. Dann gilt

$$\frac{Q_1\left(\left|\frac{w-w_0}{\overline{w}_0 w - 1}\right|\right)}{Q_2\left(\left|\frac{w-w_0}{\overline{w}_0 w - 1}\right|\right)} \equiv \frac{Q_1(|w|)}{Q_2(|w|)} \equiv Q^*(|w|) \qquad \text{für alle } |w_0| < 1 \text{ und } |w| < 1,$$

woraus sich $Q^*(|w|) = \text{konst.}$ ergibt.

Nun gestattet bekanntlich die Kugel $|z| = R(|w|) = \sqrt{1 - |w|^2}$ gewisse Transformationen S:

$$z' = z\, e^{i\vartheta} \frac{\sqrt{1-|w_0|^2}}{\overline{w}_0 w - 1},$$

$$w' = \frac{w - w_0}{\overline{w}_0 w - 1} e^{i\varphi}.$$

Damit ist eine Lösung von (4) bekannt. Man findet

$$Q(|w|) = -\frac{4}{2(1-|w|^2)^2}.$$

Also ist die allgemeine Lösung von (4)

$$Q(|w|) = -\frac{4}{\alpha} \cdot \frac{1}{(1-|w|^2)^2} = \frac{\partial^2 \log R(|w|)}{\partial |w|^2} + \frac{1}{|w|} \frac{\partial \log R(|w|)}{\partial |w|}. \tag{8}$$

Ein partikuläres Integral hiervon ist

$$\log R(|w|) = \frac{1}{\alpha} \log(1 - |w|^2).$$

---

[13]) Normierung siehe § 1.

Die Gleichungen (6) sind die Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung (5) und folglich die allgemeine Lösung von (8)

$$\log R(|w|) = \frac{1}{\alpha}\log(1-|w|^2) + c_0 \log|w| + c_1',$$

$$R(|w|) = c_1 (1-|w|^2)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |w|^{c_0}.$$

Die einzigen möglichen normierten Lösungen ($R(0) = 1$) sind die Körper mit den Randgleichungen

$$(9) \qquad |z| = R(|w|) = (1-|w|^2)^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad (\alpha > 0).$$

$$\text{also} \qquad |z|^\alpha + |w|^2 = 1$$

Soll der Körper zugleich nicht triviale Transformationen der Ebene $w = 0$ in sich gestatten, so muß die Gleichung des Randes lauten:

$$|z|^2 + |w|^2 = 1.$$

Daraus folgt, daß neben dem Dizylinder die Hyperkugel der einzige Körper ist, der sowohl nicht triviale Transformationen der Ebene $z = 0$ wie solche der Ebene $w = 0$ in sich gestattet.

Ist $\alpha \neq 2$, so sind keine Punkte auf $w = 0$ ausgezeichnet und somit nach Satz 4 überhaupt nur die Punkte auf $z = 0$. Damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

§ 5.

Wir kommen nun zum Beweise des Hauptsatzes:

Satz 6. *Unter allen Reinhardtschen Kreiskörpern sind der Dizylinder*

$$|z| < 1, \quad |w| < 1$$

und die Körper

$$|z|^\alpha + |w|^2 < 1$$

$$\textit{bzw.} \quad |z|^2 + |w|^\alpha < 1 \qquad (\alpha > 0)$$

die einzigen, die nicht mittelpunktstreue Transformationen in sich gestatten.

Welcher Art die möglichen Transformationen sind, sagt Satz 5 aus. Da nun, abgesehen von den vorgenannten Körpern, nach Satz 5 in keinem Reinhardtschen Körper ein Punkt der Ebene $z = 0$ ausgezeichnet ist, genügt es offenbar zu beweisen:

Ist kein Punkt der Ebene $z = 0$ eines Reinhardtschen Körpers ausgezeichnet, so sind höchstens die Punkte auf $w = 0$ ausgezeichnet.

Zum Beweise benötigen wir drei Hilfssätze, die allgemeiner funktionentheoretischer Natur sind und insbesondere etwas aussagen über das Verhalten analytischer Funktionen in einem Dizylinder $|z| < a$, $|w| < b$. Vor allem wichtig ist Hilfssatz 3.

Hilfssatz 1[14]). *Sind r_1 und r_2 assoziierte*[15]) *Konvergenzradien der Reihe*

$$\mathfrak{P}(z, w) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm} z^n w^m,$$

so ist die durch $\mathfrak{P}(z, w)$ dargestellte analytische Funktion $f(z, w)$ in mindestens einem Punkte (z, w) mit $|z| = r_1$, $|w| = r_2$ singulär.

Daraus ergibt sich

Hilfssatz 2. *Ist eine Funktion $f(z, w)$ regulär in jedem Punkte eines abgeschlossenen stetigen dreidimensionalen Flächenstückes*

$$\varphi(|z|, |w|) = 0, \tag{10}$$

das den Bedingungen genügt:

a) $\varphi(|z|, |w|) = 0$ *verläuft ganz in einem abgeschlossenen Dizylinder*

$$D: \quad \begin{matrix} |z| \leqq a \\ |w| \leqq b, \end{matrix} \tag{11}$$

b) $\varphi(0, 0) = \varphi(a, b) = 0$,

so ist $f(z, w)$ im ganzen Innern des Dizylinders D regulär.

Aus der Regularität auf (10) folgt nämlich die Regularität in sämtlichen inneren Punkten eines die Fläche einhüllenden Reinhardtschen Körpers. Die zu $f(z, w)$ um $(0, 0)$ gehörige Potenzreihe muß nach Hilfssatz 1 im ganzen Innern dieses Körpers absolut konvergieren. Aus der Konvergenz in einem Punkte (z_0, w_0) ergibt sich aber die absolute Konvergenz der Reihe und damit die Regularität von $f(z, w)$ für alle (z, w) mit $|z| < |z_0|$, $|w| < |w_0|$.[16])

Hilfssatz 3. *Es sei $f(z, w)$ regulär im abgeschlossenen Dizylinder*

$$D: \quad \begin{matrix} |z| \leqq a, \\ |w| \leqq b, \end{matrix}$$

und $f(0, 0) \neq 0$, $f(a e^{i\vartheta}, b e^{i\varphi}) \neq 0$ (für alle $0 \leqq \vartheta, \varphi < 2\pi$). Hat $f(z, w)$ im Innern von D eine Nullstelle, so muß die analytische Fläche $f(z, w) = 0$ alle den Bedingungen (11) genügenden Hyperflächenstücke schneiden.

---

[14]) Hilfssatz 1 ist der sogenannte Fundamentalsatz über assoziierte Konvergenzradien. Siehe auch [15]).

[15]) Bekanntlich sind die Gebiete der gleichmäßigen, absoluten Konvergenz einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(z, w) = \sum a_{nm} z^n w^m$ Reinhardtsche Kreiskörper. (Siehe die Arbeiten von Hartogs und Faber, Math. Annalen 62 und 61.) Ist $r_1 = \varphi(r_2)$, $(r_1 = |z|, r_2 = |w|)$ der Rand eines solchen Konvergenzbereiches, so nennt man zwei zusammengehörige Werte der Randkurve r_2 und $r_1 = \varphi(r_2)$ assoziierte Konvergenzradien. $\mathfrak{P}(z, w)$

konvergiert absolut für alle $|z| < r_1$, $|w| < r_2$,

divergiert absolut für alle $|z| > r_1$, $|w| > r_2$.

[16]) Vgl. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie 2 (1924), S. 32, 1. Satz.

Das besagt, $f(z, w) = 0$ hat mit allen diesen Flächenstücken ein ganzes eindimensionales Kurvenstück gemein.

Beweis. Angenommen, $\varphi(|z|, |w|) = 0$ genüge den Bedingungen (11) und es sei $f(z, w) \neq 0$ für alle (z, w) auf $\varphi(|z|, |w|) = 0$, dann ist

$$F(z, w) = \frac{1}{f(z, w)}$$

dort regulär und damit auch im ganzen (offenen) Dizylinder D, im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $f(z, w)$ im Innern von D eine Nullstelle und damit $F(z, w)$ dort einen Pol hat.

Aus den vorangehenden Hilfssätzen ergibt sich nun leicht der Beweis des Hauptsatzes.

Angenommen $P = (\alpha, \beta)$ mit $\alpha, \beta \neq 0$ wäre ein ausgezeichneter Punkt. A sei eine Transformation des Reinhardtschen Körpers K in sich, die P in $(0, 0)$ überführt; dann ist

$$A^{-1} T(\vartheta, \varphi) A$$

die zweiparametrige Schar von Transformationen von K in sich, die P als Fixpunkt haben. Die Bildpunkte von $(0, 0)$ erfüllen dabei eine zweidimensionale Fläche R, die weder mit der Ebene $z = 0$ noch $w = 0$ einen Punkt außer $(0, 0)$ gemeinsam hat (siehe Voraussetzung und Satz 4 [16a])). Durch die Drehungen $T(\vartheta, \varphi)$ geht darauf R in eine aus lauter ausgezeichneten Punkten bestehende Punktmenge $R_{\vartheta, \varphi}$ über, die in ihrem Innern mindestens ein den Bedingungen (11) genügendes Hyperflächenstück enthält. (Es kann $R_{\vartheta \varphi}$ auf ein solches Flächenstück zusammenschrumpfen.) Durch jeden Punkt dieses Flächenstückes geht eine ausgezeichnete Fläche. Nach Hilfssatz 3 müssen sämtliche ausgezeichneten Flächen, die nicht durch $(0, 0)$ gehen, mit dem Hyperflächenstück ein ganzes Kurvenstück gemein haben. Dies widerspricht der Voraussetzung, daß auf der Ebene $z = 0$ und daher auf jeder ausgezeichneten Fläche genau ein ausgezeichneter Punkt liegt (nämlich der Mittelpunkt $(0, 0)$ bzw. sein Bildpunkt).

Hiermit ist Satz 6 bewiesen und damit sind die Untersuchungen über die Abbildungen eines Reinhardtschen Körpers in sich zum Abschluß gebracht.

II. Abbildungen der Reinhardtschen Kreiskörper untereinander.

Hilfssatz 1. Zwei nicht identische, normierte Reinhardtsche Körper K und K^*, die weder Dizylinder, noch Kugel, noch einseitig kugelhaft sind, lassen sich höchstens durch die triviale Transformation

$$z' = w e^{i\vartheta}$$
$$w' = z e^{i\varphi}$$

aufeinander abbilden.

[16a]) Man beachte, daß die Absolutbeträge der zu R gehörigen z- und w-Werte *kontinuierlich* zwischen zwei Grenzen $(0 \leqq |z| \leqq d_1 > 0;\ 0 \leqq |w| \leqq d_2 > 0)$ schwanken.

Daß K und K^* mittelpunktstreu sich nur so aufeinander abbilden lassen, ist in I, § 2 gezeigt.

Es sei nun A eine Transformation, die K so auf K^* abbildet, daß $(0, 0)$ in einen von ihm verschiedenen Punkt P übergeht. Dann liefern die Transformationen

$$A\,T(\vartheta, \varphi)\,A^{-1}$$

Abbildungen von K^* auf sich, die notwendig den Mittelpunkt verschieben im Widerspruch zu Satz 6.

Entsprechend beweist man:

Hilfssatz 2. Bei der Abbildung zweier einseitig kugelhafter Körper aufeinander geht der Mittelpunkt $(0, 0)$ in einen Punkt der Ebene $z = 0$ (bzw. $w = 0$) über.

Da bei diesen Körpern jeder innere Punkt der Ebene $z = 0$ (bzw. $w = 0$) in $(0, 0)$ transformiert werden kann, gilt allgemein, wenn wir die Normierung aufgeben:

Satz 7. *Zwei Reinhardtsche Kreiskörper lassen sich nur dann aufeinander abbilden, wenn sie auch schon durch die trivialen Transformationen:*

$$\begin{matrix} z' = r_1 z \\ w' = r_2 w \end{matrix} \quad \textit{oder} \quad \begin{matrix} z' = r_3 w \\ w' = r_4 z \end{matrix}$$

auseinander hervorgehen.

III. Folgerungen aus I. und II. sowie Bemerkungen zu einem Satz von H. Cartan.

Fassen wir die Ergebnisse von I. und II. zusammen:

1. *Die einzigen möglichen, eineindeutigen analytischen Abbildungen eines normierten Reinhardtschen Körpers auf sich, der weder Dizylinder, noch Kugel, noch einseitig kugelhaft ist, und je zweier solcher Körper aufeinander sind die Transformationen:*

$$\begin{matrix} z' = z e^{i\vartheta} \\ w' = w e^{i\varphi} \end{matrix} \quad \textit{und} \quad \begin{matrix} z' = w e^{i\vartheta} \\ w' = z e^{i\varphi}. \end{matrix}$$

2. *Die einzigen Abbildungen der einseitig kugelhaften Körper in sich und aufeinander sind:*

(a)
$$\begin{cases} z' = z e^{i\vartheta} \left\{ \dfrac{1 - |w_0|^2}{(\overline{w}_0 w - 1)^2} \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \\ w' = \dfrac{w - w_0}{\overline{w}_0 w - 1} e^{i\varphi} \end{cases}$$

und

(b)
$$\begin{cases} z' = w e^{i\vartheta} \\ w' = z e^{i\varphi} \end{cases}$$

und die Kombinationen aus (a) *und* (b). *Es lassen sich von diesen nur die Körper*

$$|z|^{\alpha_0} + |w|^2 < 1 \quad \textit{und} \quad |z|^2 + |w|^{\alpha_0} < 1$$

aufeinander abbilden.

3. *Geben wir die Normierung der Körper auf, so kommen noch die Streckungen hinzu*:

$$\begin{matrix} z' = r_1 z \\ w' = r_2 w \end{matrix} \quad \textit{und} \quad \begin{matrix} z' = r_3 w \\ w' = r_4 z \,. \end{matrix}$$

Die Abbildungen der Hyperkugel und des Dizylinders hat ja schon Reinhardt angegeben[17]).

Hiermit sind also sämtliche möglichen eineindeutigen analytischen Abbildungen der Reinhardtschen Kreiskörper auf sich und untereinander bekannt.

Wir erkennen hier die schon anfangs charakterisierte eigenartige Bedeutung des Mittelpunktes eines Reinhardtschen Kreiskörpers. Die Eigenschaft, Mittelpunkt zu sein, ist eindeutig — von den Ausnahmekörpern abgesehen — einem einzigen Punkte des Bereiches zugeordnet und ist invariant gegenüber allen analytischen Transformationen. In den einseitig kugelhaften Körpern und ihren Bildern ist ganz entsprechend eine „*Mittelfläche*" festgelegt, die gleichfalls invariant ist gegen sämtliche Abbildungen. Auch bemerken wir an diesen Bereichen eine merkwürdige Starrheit gegen die analytischen Abbildungen, da sie (außer den Ausnahmekörpern) nur die trivialen Transformationen zulassen, durch die sie definiert sind.

Nun hat H. Cartan kürzlich folgenden Satz aufgestellt:

„Gibt es in einem beschränkten Bereiche D einen Punkt P, der als Fixpunkt einer zweiparametrigen Schar von Transformationen des Körpers in sich auftritt, so ist D auf einen Reinhardtschen Kreiskörper abbildbar."

Daraus ergibt sich die für die Abbildungstheorie im Raume zweier komplexer Veränderlichen wesentliche Tatsache:

Gibt es in einem Bereiche D eine zweiparametrige Schar von Transformationen in sich mit einem Fixpunkte P, so existieren keine weiteren Abbildungen von D auf sich, es sei denn, daß D auf einen Dizylinder oder einen der Körper $|z|^\alpha + |w|^2 < 1$ abbildbar ist.

Den Satz von Cartan können wir jetzt auch so formulieren:

Existiert in einem beschränkten Gebiete D ein Punkt P als Fixpunkt einer zweiparametrigen Transformationsgruppe von D in sich, so sind nur drei Fälle möglich (die sich gegenseitig ausschließen):

[17]) Siehe [5]) Theorem III, S. 255.

1. *P ist der einzig mögliche Fixpunkt.*

2. *Es gibt genau eine analytische Fläche (die „Mittelfläche"), die nur aus solchen Fixpunkten besteht.* (D ist auf einen der Körper $|z|^\alpha + |w|^2 < 1$ abbildbar.)

3. *Alle inneren Punkte von D treten als Fixpunkte auf.* (D ist auf einen Dizylinder oder eine Hyperkugel abbildbar.)

Daraus ersieht man, wie wichtig die Kenntnis der Abbildungen eines beliebigen kreissymmetrischen Körpers (der Hartogsschen Körper[18]) und der allgemeinen Kreiskörper) in sich sein wird. Wahrscheinlich werden auch bei diesen außer den ja bekannten mittelpunktstreuen Transformationen nur in ganz speziellen Fällen weitere auftreten.

---

[18]) Über die Abbildung der Hartogsschen Bereiche siehe auch: H. Welke, Münster, Über die analytischen Abbildungen von Kreiskörpern und Hartogsschen Bereichen, Math. Annalen **103**.

(Eingegangen am 23. 6. 1930.)

Lebenslauf.

Am 24. 8. 1907 wurde ich, Peter Thullen, kath. Konf., in Trier als Sohn des Geschäftsführers Jakob Thullen und seiner Frau Barbara, geb. Wagner, geboren.

Ostern 1927 bestand ich am humanistischen Friedrich-Wilhelms-Gymnasium zu Trier die Reifeprüfung. An den Universitäten Münster, Freiburg i. B., Hamburg betrieb ich hauptsächlich das Studium der Mathematik. Ich hörte bei den Herren Professoren Artin, Behnke, Heffter, Loewy, König, Krull, Neder, von Neumann und Prüfer. Ich war Mitglied der Seminare von Prof. Heffter und Prof. Loewy und ab W. S. 1929/30 Mitglied des Oberseminars von Prof. Behnke.

Vor allem Herrn Prof. Behnke habe ich meine wissenschaftliche Ausbildung zu danken, der mir auch die Anregung zu vorliegender Arbeit gab.